この和は正確に実行できない. $\sqrt{\beta E_0} << 1$ であれば, ガウス積分に近似できる.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp[-\beta E_0] = \frac{1}{\sqrt{\beta E_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-(\sqrt{\beta E_0} n)^2] \tag{3.12}$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{\beta E_0}} \int_0^{\infty} dx e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta E_0}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}} L \tag{3.13}$$

よって分配関数は,

$$Z = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{3N/2} \tag{3.14}$$

となる. これを使って計算すれば,

$$\langle H \rangle = \frac{3N}{2} kT \tag{3.15}$$

$$P = \frac{N}{V} kT \tag{3.16}$$

$$F = -\frac{1}{\beta} \log \left\{ \frac{V^N}{N!} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{3N/2} \right\} \tag{3.17}$$

$$\simeq -\frac{N}{\beta} \log \left\{ \frac{V}{N} e \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{3/2} \right\} \tag{3.18}$$

最後の行の近似はスターリングの公式 $N! \sim (N/e)^N$ を使った.

$$S = -\frac{\partial}{\partial T} F \tag{3.19}$$

$$= Nk \left\{ e \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{VT^{3/2}}{N} \right\} + \frac{3}{2} Nk \tag{3.20}$$

$$= Nk \left\{ e^{5/2} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{VT^{3/2}}{N} \right\} \tag{3.21}$$

これからポアソンの関係式 $VT^{3/2} =$ 一定が得られる.